2°/ $y'' + 6y = 0 \Leftrightarrow y'' + \sqrt{6}^2\, y = 0$

d'où : $y = a\cos(\sqrt{6}\,x) + b\sin(\sqrt{6}\,x)$ $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

3°/ $y''' + 2y' = 0$

on pose : $y' = Z$

on a : $Z'' + 2Z = 0 \Leftrightarrow Z'' + \sqrt{2}^2 Z = 0$

d'où : $Z = a\cos(\sqrt{2}\,x) + b\sin(\sqrt{2}\,x)$

d'où : $y' = a\cos(\sqrt{2}\,x) + b\sin(\sqrt{2}\,x)$

et par suite $y = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}\,x) - \frac{b}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}\,x) + C$; $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

Solution 12 :

1°/ $y_0'' + 9y_0 = 0 + x = x$ D'où y_0 est solution de (E)

2°/ y est solution de (E) ssi

$y'' + 9y = x \Leftrightarrow y'' + 9y = y_0' + 9y_0 \Leftrightarrow (y - y_0)'' + 9(y - y_0) = 0$

$\Leftrightarrow (y - y_0)$ est solution de (*) : $y'' + 9y = 0$

3°/ $y'' + 9y = 0 \Leftrightarrow y'' + 3^2 y = 0$

d'où $y = a\cos(3x) + b\sin(3x)$ $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$

les solutions de (E) :

$y - y_0$ est solution de (*) donc $y - \frac{x}{9} = a\cos 3x + b\sin 3x$

et par suite $y = \frac{x}{9} + a\cos 3x + b\sin 3x$ $(a,b \in \mathbb{R})$

Solution 13 :

(E) : $y'' + 4y = 8e^{2x}$

1°/ f_0 solution de (E) si et seulement si $f_0'' + 4f_0 = 8e^{2x}$

On a : $f_0'(x) = 2ae^{2x}$

$f_0''(x) = 4ae^{2x}$

On obtient : $4ae^{2x} + 4ae^{2x} = 8e^{2x}$

D'où : $8a = 8$ et par suite $a = 1$

Conclusion : $f_0(x) = e^{2x}$

2°/ y solution de (E) ssi

$y'' + 4y = 8e^{2x} \Leftrightarrow y'' + 4y = f_0' + 4f_0 \Leftrightarrow (y'' - f_0') + 4(y - f_0) = 0$